

美国小学数学内容结构之批评

马立平^{1,2}

(1. 小学数学教育研究独立学者; 2. 斯坦福周末中文学校, 美国)

摘要: 从 20 世纪 60 年代“新数学”运动以来, 美国小学数学教育的内容及其组织结构发生了重大的改变. 内容上, 放弃了小学算术本身的理论体系, 引进了一些数学高级分支的概念; 组织结构上, 变之前的“核心学科型”为“条目并列型”. 对这段历史的追述表明, 这个改变很可能是导致目前美国小学数学教育“宽而浅”现状的主要原因, 并提醒中国小学数学改革注意此覆辙.

关键词: 小学数学教育内容及其组织结构; 小学算术; 美国加州数学教育大纲; 美国 NCTM 课程和评估标准; 中国数学课程标准

中图分类号: G510 文献标识码: A 文章编号: 1004-9894 (2012) 04-0001-15

如果小学数学教学研究领域可以简单地划分为“教学方法”和“教学内容”两大领域的话, 此文属于后者. 希望以此文提请美国小学数学教育界从整体上反思教学内容及其结构; 同时也唤起中国小学数学改革者们与此相关的认真思考.

文章所讨论的小学数学结构, 指构成小学数学内容的各个部分, 和它们之间的关系. 可以先通过图 1 对将要讨论的两种小学数学内容结构有一个直观的印象. 其中图 1

中“ A ”根据 2001 年中华人民共和国教育部颁布的《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》(下简称为“2001 中国课标”)发表之前的小学数学内容勾勒¹, 图 1 中的“ B ”根据美国 2000 NCTM《中小学数学教育的原则与课程标准》(Principles and Standards for School Mathematics) (以下简称“2000 美国 NCTM 课程标准”或“2000 NCTM 课程标准”)勾勒.

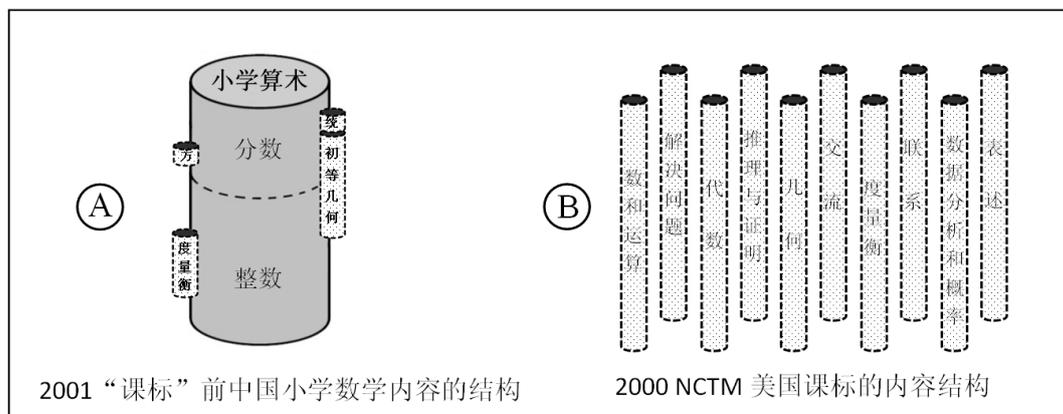


图 1 小学数学内容的两种组织结构形态

图 1 中的“ A ”是一个“核心学科型”结构. 中间最大的灰色圆柱体代表自成一体的核心学科“小学算术”. “小学算术”由“整数”和“分数”两大部分组成, 前者是后者的基础, 后者建立于前者之上. 其它 4 个小圆柱体代表小学数学内容的另外 4 个组成部分, 它们在教学中出现的顺序由下至上依次为: 度量衡、初等几何、简易方程(方)和简单的统计表和统计图(统). 由于这 4 个部分的内容都不足以形成自成一体的一个学科, 所以用虚线勾勒. 5 个圆柱体的大小反映它们在整个小学数学内容中所占的大致比例. 它们的位置反映各组成部分相互之间的关系: 算术是小学数学内容的主体, 在算术教学发展的某些阶段, 分别插进其它各部分内容的教学, 由此 5 个部分结合成一个整体.

图 1 中的“ B ”是一个“条目并列型”结构. 10 个圆柱体各代表“2000 NCTM 课程标准”的一条标准. 前排 5 条为“内容标准(Content standards)”, 后排 5 条为“过程标准(Process standards)”(NCTM, 2000, p.29). 如图 1 所示, 它们中没有一个自成一体的学科. 这样的结构在 20 世纪 60 年代初在美国出现. 从那时至今的五十年来里, 条目的称呼曾经随时代、地域而变. 或称为“支股(strands)”, 或称为“内容领域(content area)”, 或称为“标准(standards)”. 而且, 条目的数量、形态和各条目所代表的内容也都经过多次改变.

“学科核心型”和“条目并列型”两种结构, 其形态上明显的不同, 在于前者以一个自成一体完整的学科贯穿始

收稿日期: 2012-06-07

作者简介: 马立平(1951—), 女, 上海人. 斯坦福大学教育学院博士, 小学数学教育研究独立学者. 研究方向: 小学数学教师的学科知识; 小学数学教育内容; 海外华裔青少年中文教育.

终;而后者则没有这样一个完整的学科,所有的条目齐头并进,共同从头至尾贯穿小学数学教学。值得注意的是,前者作为核心的完整学科“小学算术”在后者中居然没有出现。

事实上,美国的小学数学教育内容曾经也是“核心学科型”结构形态,美国数学界的学者,参与了该结构雏形的构建。但是,从 20 世纪 60 年代开始,美国的小学数学内容的结构形式开始发生根本的变化,演变成了图 1 中 B 部分那样的“条目并列型”形态,以至于现今美国小学数学界对“核心学科型”结构已经相当陌生了。下面先简略地介绍“核心学科型”结构,然后再重点讨论“条目并列型”结构在美国小学数学教育领域的发生、发展和演变。

1 “学科核心型”结构——特征 来源 演变

1.1 “学科核心型”小学数学的特征

由于无法得到 20 世纪末的中国数学教育大纲文本,图

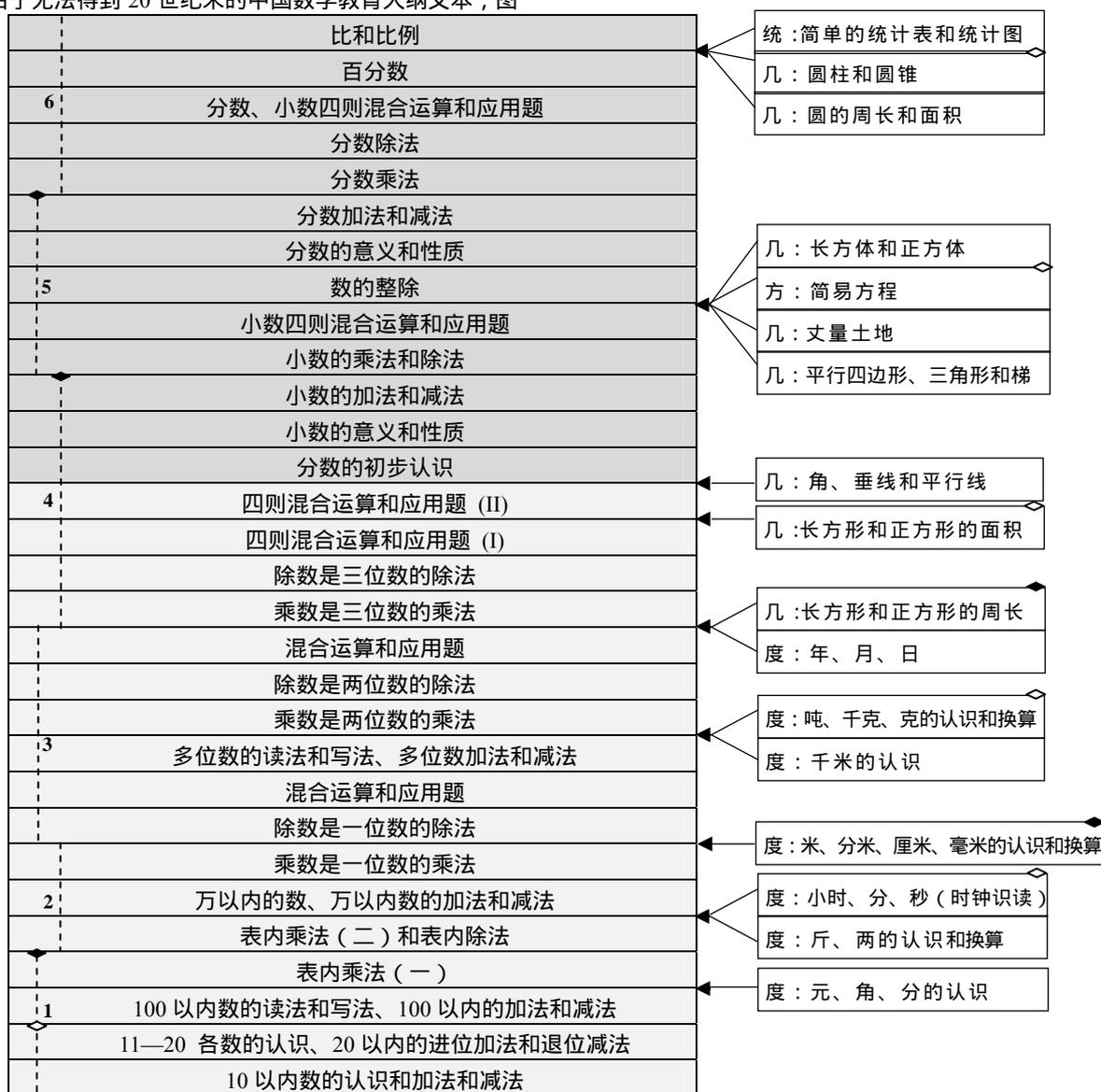


图 2 中国小学数学算术核心学科的展开和其它内容的插入(一至六年级)

下面讨论从观察图 2 能直接看到的小学数学内容结构形式的特点。先讨论其核心学科——“算术”的 3 个特点。第一个特点,算术在整个小学数学教学内容中明显地处

于最重要的地位。全套 6 年用的教材 12 本,总共 1352 页ⁱⁱ。其中算术的篇幅有 1103 页,占 81.6%,其它内容度量衡 36 页、初等几何 135 页、简易方程 23 页、统计图表 18 页,另外还

2 用一套中国小学数学教科书一到六年级教学内容的安排,来展示“学科核心型”结构的具体形态ⁱⁱ。图 2 中的主体部分,即图 1 中“学科核心型”结构状态里的灰色圆柱体所代表的算术学科。由下往上,展示了一至六年级逐步展开的教学内容。浅灰底的下部代表整数部分,其上灰色较深的上半部是分数(也包括小数和比和比例)部分。

主体部分的右边一些与其相连的小方格,代表算术以外的 4 项其它内容:度量衡(度)、初等几何(几)、简易方程(方)、简单的统计图表(统)。小方格左边的箭头和主体部分的连接处,表示该方格中内容插入算术教学中的位置。叠在一起的小方格中内容的教学顺序,也是由下到上。

图中垂直的虚线和旁边的数字,表示内容所属的年级。图中的白色菱形,表示学年中第一学期的终止处,黑色菱形表示第二学期即一个学年的终止处。

有珠算 37 页^{iv}。所有非算术内容(连珠算)合起来只占总篇幅的 18.4%。另外,6 年 12 个学期里,有 10 个学期都是先学算术内容,非算术内容安排在学期的后部,这使得算术的内容更为突出。

第二个特点是算术教学内容的连贯性。请注意图 2 中非算术知识在算术教学上的插入点。可以看到,在若干项算术内容连成的一“片”内容没有结束之前,不会有非算术的内容插入。例如一年级的前 30 周全部是算术内容,“10 以内数的认识、加法和减法”、“11~20 各数的认识、20 以内的进位加法和退位减法”、“100 以内数的读法和写法、100 以内的加法和减法”³部分紧密相连一气呵成,保障了学生对 100 以内数字的认识和加减运算的掌握,为今后的学习铺下一块坚实的基石。又如从“数的整除”开始到“百分数”,7 项内容连成一片,使学生能心无旁骛地完成小学数学中难度比较大的分数加、减、乘、除的学习。

第三,算术教学内容展开的顺序,兼顾到各项算术技能本身的依存关系和小学生数学学习的特点。比如说,按照技能本身的依存关系,在第三项“100 以内数的读法和写法、100 以内的加法和减法”之后,应该安排的后续技能是 1 000 以内或更大的数的认识和加减。但是教科书里实际安排的却是“表内乘法和除法”。这是因为 100 以内数字的认识和运算是小学数学学习的基础,在 100 以内的加、减之后再学习表内乘除,让学生从新的角度接触和操作 100 以内的数字,非常有利于巩固这个基础。再比如,“分数的初步认识”之后,不是直接进入分数运算,而是安排小数的四则运算。小数是分数的一种特殊形式,而运算方法则和整数相接近。这样的安排既可以帮助学生理解小数的概念,又可以复习之前学习的整数四则运算,还为将来进一步学习分数的性质和运算做好了准备,可以说是一举三得。

关于“学科核心型”小学数学中非算术的其它内容,也有值得注意的 3 个特征。首先,在整个小学数学教学的过程中,核心学科算术和这些非算术内容之间,既是以主带次关系,又是相互支持的关系。一般说来,每一部分非算术内容的插入,都是在算术学习进行到某个阶段,为之做好了充分准备的时候。比如说,“元、角、分的认识”,是安排在“100 以内数的读法和写法、100 以内的加法和减法”完成之后插入的,这个时候,学生刚好对 100 以内的数有了一定的认识,并且具备了进行 100 以内加减法运算的能力,这正是认识、并对“元、角、分”进行一些初步操作的基础,而同时,学习“元、角、分”又为学生提供了一个复习和巩固前一段所学内容的机会。同样,“时钟的识读”需要乘以 5 的乘法运算,把“小时、分、秒的认识”安排在完成表内乘法之后,既有前面的算术运算知识作为支撑,反过来也强化了之前所学的乘法的概念和运算。

其次,非算术内容的教学内容的安排,也有很强的连贯性。“学科核心型”的中国小学数学里的 4 项非算术的内容,依次呈现,基本上没有重叠。首先是“度量衡”,由 7 个教学单元组成,在三年级结束之前全部完成。接下来是“初等几何”,由 8 个教学单元组成,分布在三到六年级。期间五年级有“简易方程”(只有一个单元),安排在第一学期结束

之前。最后,在“初等几何”的全部内容完成之后,安排“简单的统计表和统计图”(也只有一个单元)。这样的安排,在保障了算术学科学习的连贯性的同时,也有效地照顾到了各项非算术知识内容学习的连贯性,同时也保障了学生学习注意力的相对集中。

最后,各项非算术内容的篇幅是不一样的。如果把这 4 项内容的全部篇幅看作 100,它们的比例从大到小依次为:初等几何(64%)、度量衡(17%)、简易方程(11%)和简单统计图表(8%)。这说明,核心学科型结构对于算术学科以外的内容并不是“一视同仁”,而是有所侧重的。其中最重视的是初等几何。事实上,如果算上“度量衡”内容里和初等几何密切相关的长度单位和测量,初等几何的内容还要超过 64%。这样明显地侧重,应当和小学后续的初中的数学学习内容有关——在小学阶段的算术作为中学里代数学学习的基础,而初等几何则为中学的几何学习打好基础。

总之,图 2 中的各项教学内容,如果一条条孤立地看,显得十分平常;但是整体地看,则是经过精心安排和仔细量度的。它是既考虑到知识技能的依存关系、又考虑到学生学习特征的,六年一贯的小学数学课程框架。

1.2 小学算术的定义体系

如果中国的小学数学只有图 2 所反映的这些外部特征,那么它还不足以被称为“学科核心型结构”,因为根据图 2 的主体部分,难以判断小学算术究竟是各项运算技能的集合,还是一门自成一体的、贯彻了数学思想的学科。其实,在这些运算技能名称的后面,还有一套完整的小学算术理论。

小学算术理论的内核,是一个定义体系。这个定义体系规定了小学算术中的基本数量关系,并且为整数和分数的四则运算法则提供了比较完整的解释。有意思的是,虽然这个定义体系在当今中国小学数学中依然基本完整,该体系的建立过程,中国却并没有参加。相反,从 19 世纪后半叶美国小学算术课本中,可以看到美国学者们的努力和贡献^v。

小学算术的前身,是在欧洲之后流行了数百年的商用算术。商用算术以介绍实用的运算法则为内容,但是没有理论说明这些法则为什么可行。19 世纪中,普及小学教育的运动在欧洲和美国兴起,逐渐有数学界的学者参与到小学算术课本的撰写工作中来。他们撰写小学课本时采用的模本,就是人类历史上最有影响的数学课本——欧几里得《原本》。这些数学界的学者们仿效《原本》的思路,努力尝试为算术的内容——整数和分数的四则运算建立一个定义体系。到 19 世纪末,在美国,这个定义体系已经基本成型了。

小学算术的定义体系从“单位一”这个“不证自明的基本概念”出发,经过“单位一”概念抽象水平的若干次提升,推演出完整的小学算术定义体系。这个定义体系是一张完备的概念网,其中所有的概念,都有明确的“通道”可以追溯到体系的起点,而这张“网”所定义的概念,正好足以对整数和分数的四则运算法则做出解释。从算术定义表述的基本数量关系出发,甚至可以对比较复杂的数量关系进行分析,比如古希腊数学家丢番图墓碑上关于计算他生命长度的题目^{vi},就可以在这张“概念网”里得到解决。而按照这个定

义体系学习整数和分数四则运算的小学生,在掌握四则运算法则的同时,也随之有步骤地提升了抽象思维的水平.小学算术定义体系,是小学算术理论的主要组成部分.在中国和其他一些国家里,整数和分数四则运算的教学中的正是这个定义体系^{vii}.

1.3 关于某国是否仍在使用小学算术定义体系的判断

如何判断一个国家是否仍在使用完整的小学算术定义体系?下面一道题目可以提供简便而有效的测试.几年前,美国数学教育界发生过一场小小的震惊和不安——有一道新加坡小学五年级课本里的应用题,大家可以用各种方法得到答案,却唯独不知道如何列出算术的式子来解答:

题目:陈太太做了一些点心去卖.上午卖了 $\frac{3}{5}$,下午卖了剩下的 $\frac{1}{4}$,上午卖出的点心比下午多 200 个,她做的点心一共有多少个?

事实上,解答这道题的算术列式和答案应为:

$$200 \div [3/5 - 1/4 \times (1 - 3/5)] = 200 \div 1/2 = 400 \text{ (个)}.$$

小学算术的定义体系,是通过“单位一”概念抽象水平的层层提升,一步一步地推演出来的.而用算式表达以上这道题的数量关系,正是处在整个推演过程的“终端”.对于完整地“走完”整个体系的推理过程的人,如此解题是水到渠成;反之,则无法列出这个算式.所以,只要测试某国完成了分数运算教学后的小学生是否能列出算术式解答这道题^{viii},就可以判断该国小学数学教学是否在使用基本完整的小学算术定义体系.新加坡的五年级小学生经历并理解了完整的推演过程,所以他们能够用列出算术式子解答这道题.而在美国,不仅小学生,就连他们的老师,以及培训老师的小学数学教育领域的大学教授,绝大多数也不能列出算术式子来解答这个题目,说明在今天的美国小学教学中,这个定义体系已经是支离破碎.

1.4 “小学算术”学科的建设

从美国小学数学教材来看,19世纪末算术定义体系基本建立之后,“小学算术”作为一门学科的发展似乎基本停止了^{ix}.然而,在美国以外的一些国家里,“小学算术”的发展没有就此停止.从中国的小学数学教育内容中可以看到,“小学算术”作为一门学科在定义体系建立之后的演进,至少有以下3个方面:

第一,引进了交换律、结合律、分配律和互补律这一组基本运算规律.这是19世纪末的美国小学数学课本里所没有出现的.有了这组规律,整数和分数四则运算运算法则的解释更加简明,运算法则的运用也更加灵活,而且对于小学数学学习之后的代数学习,更是非常好的铺垫.

第二,引进了典型应用题(typical word problems).从中国等古老文明流传下来的典型应用题(行程问题、追及问题、工程问题,等等),体现了和“欧几里得几何”演绎推理不同的数学思维方式.按照《原本》思路建立的小学算术定义体系讲究严密地推理,而典型应用题的学习,则强调某些典型数量关系在其多种变式中的巧妙运用.典型应用题在19世纪末的美国小学数学课本里只是偶尔出现,中国(和其他一些国家如俄国)小学数学课本里则有比较系统的介绍.把典型应用题引进小学算术,对于根据定义系统的推理

写出算式解答应用题的做法,既是一种补充,又是一种对照.这使得学生的思路更加活泼、开阔,也丰富了小学算术的内容.

第三,发展起多方面的小学算术教学手段.在19世纪末美国小学数学课本里看到的小学算术的定义系统,用严格的文字表述,按照演绎推理的顺序排列,虽然做到了数学学科所要求的严谨,然而其抽象水平的高度,却是小学生的认知能力难以直接达到的.这或许正是造成20世纪初美国小学算术的理论建设停顿的原因之一.但是经过多年的摸索,美国以外的一些国家,找到了合适的教学手段,得以顺利地以这个定义体系为支撑的小学算术教给小学生.这些手段是多方面的,既有前面提到的内容顺序安排,也包括具体内容的呈现方式,还有例题、练习的设计,等等^x.比如,文章“从一位数加减法运算的三种教学思路说起”里,介绍了如何向一年级小学生介绍定义系统里的加减法概念以及加法交换律和结合律的具体例子.同时,还建立起一套小学算术教学用术语,这些术语对提高教学质量起着有力的职称作用.

经历了以上3个方面的进一步发展,小学算术学科的建设基本完成了,它包括4个相互关联的部分^{xi}.

(1)商用算术留下的阿拉伯数字的整数和分数的四则运算法则.

(2)据《原本》思路建立的小学算术理论(含一个定义体系,一组基本运算规律,和用以表达数量关系的算术式).

(3)以典型应用题为代表的、反映和《原本》不同的数学传统的内容;

(4)各种教学手段和一套完整的教学用术语,保障了学生能在小学阶段有效地学会以上各项内容.

小学算术作为一门学科是自成一体的,同时也是开放的,而且还是可教的.它所包含的运算技能,足以满足其学生将来日常生活中的运算需要.它所体现的数学思维方式,为学生将来进一步学习数学学科知识准备了良好的基础.

可惜的是,由于20世纪初的进步教育运动,美国的小学算术学科建设实际上并没有真正完成^{xii}.也就是说,在美国的小学数学教育领域,完整的小学算术学科可能从来也不曾存在过.

小学算术学科的理论特征赋予了它整合一些非算术内容的力量^{xiii},经它整合的非算术内容,可顺应时代变化作伸缩增减.和19世纪末美国小学数学课本相比照,今天中国小学数学课本的非算术部分的领域有增减,内容有伸缩.比如前者里的“利润核算”、“合金成分配比”等领域,在后者里没有出现.反之,后者里的“简易方程”、“简单的统计图表”是前者所没有的.另外,“度量衡”的领域虽然依然存在,但是原来其中的主要内容“换算”,明显减少了.而“初等几何”的内容,则基本上和前者相当.这样的增减和伸缩,显然是反映了时代和生活的变化带给数学教育的新要求.

2 美国小学数学内容的“条目并列”结构——来源 特征 发展

虽然完整的小学算术学科不曾在美国发展起来,但是从

普及小学教育的起点算起,美国小学数学内容也曾经历近百年的、以算术为主体的“学科核心型”结构。然而,现在的美国小学数学,却成了“条目并列型”结构。这个变化是在什么时候、怎样发生的?又是怎样演进到图1中那样的形态的?结构形态的改变对美国小学数学究竟意味着什么?下面,从创立美国小学数学条目并列型结构的加州第一个数学教育大纲开始,追溯美国小学数学内容结构方面的变化。

近几十年来,加州的数学教育和全美数学教育有着耐人寻味的关系。从某种意义上可以说,加州是全美数学教育改革的“领跑员”。Wilson在她的著作《加州之梦:改革数学教育》中曾再三强调加州数学教育改革对全美数学教育的影响。她指出,《1989美国NCTM课程标准》和早其4年发布的《1985加州数学教育大纲》“基于相同的研究、承诺、和思想”(Wilson, 2003, p.26)。十多年之后,2000年版的NCTM《数学教育原则与标准》(以下简称“2000美国NCTM课程标准”或“2000NCTM课程标准”)又呈现出与先其一年出版的《1999加州数学教育大纲》共同的倾向和特征。接下来要讨论的是加州数学教育对美国数学教育的另一个更早、更为重大的影响:即被称为“支股报告”(The Strands Report)的第一个《加州数学教育大纲》所导致的小学数学教育内容结构的根本性的改变。

2.1 《第一个加州数学教育大纲》——“条目并列型”结构的创立

1957年7月苏联人造卫星上天,这起非同寻常的事件引起美国人对本国科学和数学教育反思。1958年,美国国家科学基金会NSF拨款成立由数学家Edward G. Begle领导的学校数学研究小组(School Mathematics Study Group, 即SMSG),推动“新数学”课程改革。

1960年,加州成立数学教育咨询委员会,由Begle担任首席顾问,主持全州的数学教育改革。咨询委员会包括3个分委会。第一分委会“数学思想支股分委会(the subcommittee on “Strands of Mathematical Ideas”)以大学数学教授为主,由他们决定新课程的“数学结构”。其它两个分委会的任务是将新课程付诸实施:一个决定如何培养教授新课程的师资,另一个决定如何选择新课程的教材。

1963年,由3个分委会的报告合成的《数学教育顾问委员会对加州课程执行委员会的报告之总结》(Summary of the report of the advisory committee on mathematics to the California State Curriculum Commission)正式出版。由于报告最主要的部分是第一分委会撰写的《数学的支股》(The Strands of Mathematics),所以也被称为《支股报告》(Strands Report),后来,它被正式命名为“第一个加州数学教育大纲”。正是这个报告,开创了条目并列的小学数学结构。

《数学的支股》写道(CSDE, 1963, p.1-2):

“我们在这里提倡的课程,与平常幼儿园到八年级课程中早已被证明持续有用的内容(topics)有所偏离。最根本的不同,在于我们提倡的课程是一个不可分割的整体——由若干贯穿课程始终的、反映数学基础概念的基本支股(basic strands),把组成现有课程的许多的技能和技巧(skills and techniques)结合在一起。”(强调部分由此文作者加粗)

报告提出,新的加州K-8年级数学课程将由以下8个“贯穿课程始终的、反映数学基础概念”的“基本支股”(basic strands)构成^{xiv}:

- (1) 数字和运算 (Numbers and Operations);
- (2) 几何 (Geometry);
- (3) 度量衡 (Measurement);
- (4) 数学应用 (Application of Mathematics);
- (5) 集合论 (Sets);
- (6) 函数与曲线 (Functions and Graphs);
- (7) 数学式 (The Mathematical Sentence);
- (8) 逻辑 (Logic)。

以这8个支股把“组成现有课程的许多的技能和技巧结合在一起”的构想,意味着小学数学课程的双重“革命”。一是内容构成方面的“革命”——不再承认算术在小学数学课程里的核心地位,并把诸如“集合论”、“函数”和“逻辑”等数学学科高级分支的概念引入了小学。二是课程结构形态方面的“革命”——创立了新的、条目并列的小学数学结构:(如图3所示)

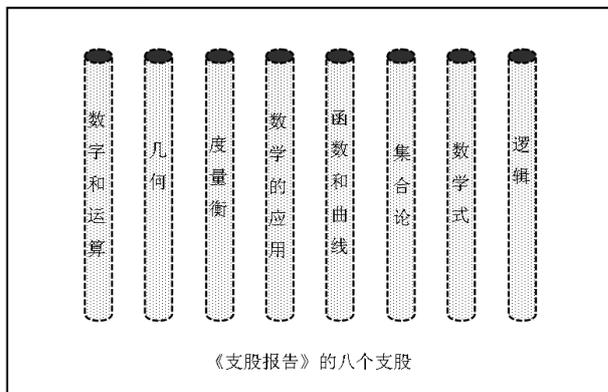


图3 “支股报告”提出的小学数学内容的结构

请注意:“支股报告”列举的8个支股作为小学数学的教学内容,没有一个具有自身的完整性。虽然“报告”分别论述了每个支股里的若干重要概念,但是却没有提出任何论述,证明这些重要概念足以在小学数学学习中构成某一个完整统一的知识领域。比如,在支股“数和运算”里,一共讨论了“一一对应”、“位值”、“数和数字”、“笛卡尔积”等15个概念(CSED, p.4-13)^{xv}。“报告”中显示这15个概念是“重要”的,却没有表明它们之间是如何相关、如何可以连成一个整体。其它的7个支股也是同样,只是列举并讨论了各领域的一些重要概念,却没有说明这些概念何以构成一个知识的整体。这8个支股每一个,都是作为某一领域的一些重要概念、而不是一个完整的领域呈现的。

从前面的引文可以看出,《支股报告》作者的希望,是用一些重要概念“贯穿课程始终”的做法来统一小学数学内容。但是,却没有论证这些概念本身如何能够在小学数学中联系成一个统一的体系。而通过它们来统一小学数学内容的想法,也至今尚未在美国小学数学教育中实现。就这样,新引进的高级分支的概念并没有构成一个统一的知识整体,而原来统一的算术定义体系又被正式放弃了。

今天回过头去读《支股报告》,应该承认其中不乏一些

精彩见解和议论,也可以理解撰写报告的数学教授们在当时面对国家安全的社会危机,希望把学科高级分支的概念引进初级学习阶段的热情和迫切心情.但是,或许是时间不允许,或许是有着其他今天所难以了解的原因,他们居然没有对提出的新方案进行论证:为什么要把原来以算术为核心的小学数学课程,改变成 8 股并进的课程^{xvi}? 后者的优越性何在? 根据什么,这 8 个支股,而不是其它的、同样多、或更多或更少的支股,能够使小学数学课程成为“不可分割的整体”?

《支股报告》曾表述了想要把小学数学课程统一为一个“不可分割”的整体的愿望,然而,其条目并列的结构,恰恰是阻碍实现“不可分割”的形态.在《支股报告》中,找不到证明它所列出的 8 个支股是一个“不可分割”的整体的文字.既然是数股并列的结构形态,又没有有力的论据证明这 8 个支股是小学数学内容唯一正确的组合,那么,这一组支股的被分割——增加,减少,或变换,就将是难以避免的事.事实上,仅仅数年之后,这样的情况就发生了,而且不断地变化延续至今.

把小学课程结构表述成条目并列的形态,其最直接的后果是“小学算术”在小学数学课程里的核心地位被否定了.《支股报告》把“算术的内容(topics)”归到“数字和运算”和其它支股里,用一批数学高级分支的概念加以一些讨论和解说.从此以后,美国在 20 世纪初停止发展了的小学算术学科,彻底瓦解了.

2.2 《第二个加州数学教育大纲》——支股的第一次增减和更名

4 年之后,1967 年,加州数学教育咨询委员会向州政府提交了《第二个支股报告》(The Second Strand Report),即第二个加州数学教育大纲.该报告于 1972 年正式出版,全称是《第二个支股报告:加州公立学校幼儿园到八年级数学教学大纲》^{xvii}.在第二个支股报告中,支股的数量和内容就都有了明显的变动(具体变动情况见图 4).

第二个支股报告减去“数学式”这一支股,新增“统计与概率”和“解决问题”两个支股,使得支股的数目,由原来的 8 个变成为 9 个.同时,把原来的支股“逻辑”改名为“逻辑思维”.至于支股的改变,删除的为什么删除、增加的为什么增加、改名的为什么改名,文件里都没有加以说明.

事实上,正是条目并列的结构形态,给支股数目的随意增减、支股名称和内容的随意改变,支股性质的随意说明,提供了无限的可能性.而正是这样的可能性,导致此后几十年美国小学数学内容失去了必要的稳定性和统一性.仅仅 4 年之内,参加两次报告起草的数学教授们已经对数学课程的支股进行了不经论证的增减和改动.在这样的结构里,没有一个条目本身的内容具备完整性,组成小学数学内容的若干条目也不存在确定性.任何人一旦被赋予起草大纲的权利,就可以非常容易地更改数学教学的内容.后来,当数学教学大纲的起草主力不再是数学教授,依次登场的其他专业人员如教师、认知学家等,正是在这样条目并列的结构形态里作任意的改动.

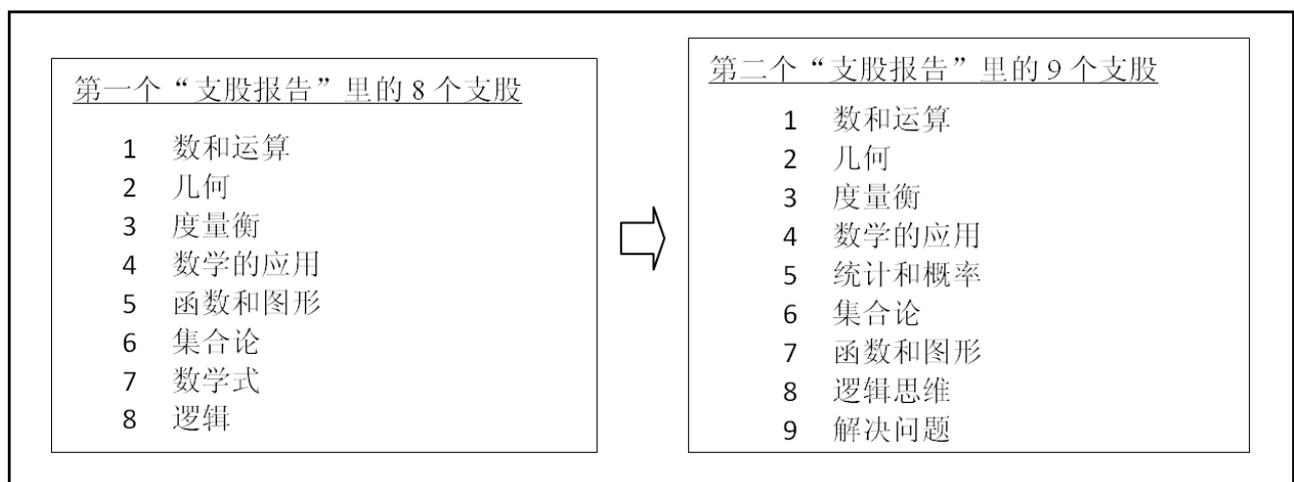


图 4 第二次“支股报告”中支股的增减和更名

2.3 “回归基础”大纲——同样的结构 不同的理念

第二个支股报告出版后第三年,加州数学教育的方向发生了重大的转变^{xviii}.加州教育部决定放弃前两个大纲所提倡的“新数学”,转而重视“数学基本技能的获得(CSDE, 1975,序)”.州政府召集起以一位资深中学数学教师为首的数学教育大纲临时委员会,于 1975 年出版第三个数学教育大纲(CSBE, 1975)^{xix}.加州教育部长亲自为大纲撰写前言,他说,虽然这个新的数学教学大纲可以被称为“‘后新数学(post-New math)’大纲”,他个人则更愿意把它称作

“基础大纲”.部长强调说,这个大纲的内容“反映的不是数学家,而是教师们所关心的问题”.非常明显,这个大纲的主导思想,与前面两个大纲相比有了本质的改变,起草第一、第二个数学教育大纲的数学教授们的理念被放弃了,数学教授也不再是起草大纲的中坚力量.

作为“新数学”时代结束标志,“集合论”这一支股从数学大纲中被删除了.此外,新大纲把前一大纲里最后一个支股“问题解决”与第四支股“数学应用”合并成“问题解决与数学应用”,使得“问题解决”的位置靠前了.另外,

有两个支股的名称被改动：“数字和运算”被改成“算术、数字和运算”，“函数和曲线”被改成“关系和函数”。请看第二个和第三个加州数学教学大纲中支股的比较（如图 5）：

“基础大纲”所作的另一个改变是提出了“学段”的划分。传统的小学数学内容是根据年级安排的，而在第一个加州数学教育大纲即“支股报告”里，按年级规定学习内容的做法被取消了，k-8 年级统成一体^{xx}。“基础大纲”改变了“大一统”的做法，划分出学段来讨论学习内容：幼儿园到三年级为一段，四年级到六年级为一段，七年级到八年级为

一段。同时，“基础大纲”把“支股”也称作“内容领域（content area）”（1975，CSDE p.11）。

从“新数学”的时代到了所谓“回归基础”的时代，数学教育的理念上发生了根本的变化。但是，撰写第一次数学教育大纲的数学教授所开创的美国小学数学条目并列的结构形态却保存下来了。在这样的结构形态之中，只需要通过稍微加、减支股的数量，并且对支股的内容重新表述，课程的主导思想的根本性变化就“顺理成章”地完成了。

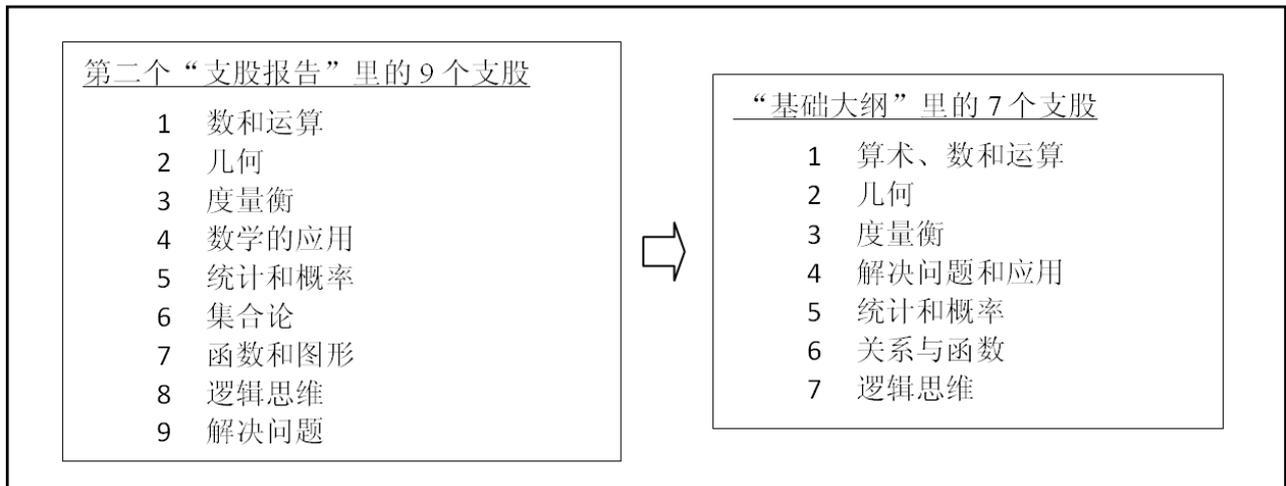


图 5 在支股的调整中完成“新数学大纲”到“基础大纲”的改变

2.4 加州《数学教学大纲 1980 增补版》——“解决问题”高于一切

1975 年版数学教育大纲公布后 5 年，加州教育部又公布了《数学教育大纲 1980 增补版》（CSDE，1982）。“增补版”用相当于 1975 大纲五分之四的篇幅，对“基础大纲”的理念进行了修正：

“回归基础”运动的结果，使得一些教育者把数学课上过多的时间用于机械练习和死记硬背。随着低价、高性能的计算器的出现，计算可以比从前更准确、更快捷了。这就允许教师能把更多的时间用于作为数学课程重点的“解决问题（problem solving）”（CSDE，1982，p.75）。

为了强调“解决问题”的重要性，大纲增补版把“解决问题 / 应用”这一支股单独抽出来，“像一把伞那样处于其他所有支股之上”（p.59 CSDE，1982），而把其他支股降格为“从属”的“技能和概念领域”（p.55 CSDE，1982）。为了形象地表述“问题解决 / 应用”支股和它的支股关系，“增补版”里有图解如下（CSDE，1982，p.60）（如图 6）：

1980 年大纲增补版中把支股的重要性做出区分，让某些支股的重要性高于其它支股的做法，延续到了下一个大纲，并且影响到 1989 NCTM 课程标准。

2.5 加州《1985 数学教育大纲》和《1989 NCTM 课程标准》——二级条目的创建

加州的下一个大纲《1985 数学教育大纲》（以下简称《1985 加州大纲》）和《1989 NCTM 课程标准》有着共同的、

全新的数学教育愿景和相似的内容结构。这两个文件表达了激动人心的、新的数学教育的愿景：让每一个学生（而不仅仅是少数学术精英）获得数学能力（mathematical power，CSED，1985），具备数学教养（mathematically literate，NCTM，1989）。

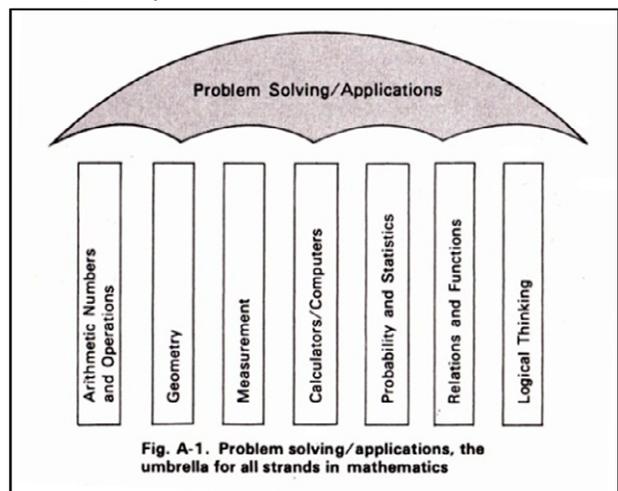


图 6 1980 年增补版把“问题解决”作为置于其它支股之上的“伞”（CSDE，1982，p.60）

前面已经说过，提倡“新数学”运动的数学家们试图用数学学科高级分支的基本概念来解释小学学习内容，而这一次改革则有更多的认知科学方面的影响。认知科学领域的术语“能力”、“信心”、“数感”、“空间感”、“体验”、“交流”、“理解”，等等，频频出现在这两个文件中。

《1985 加州大纲》指出：“获得数学能力，包括辨别数学关系、有逻辑地推理和有效地运用数学技能的能力，必须成为数学教育的中心，并且成为学生发展技能的环境（context）”（CSDE，1985，p.1）。“这次大纲的目标，是要构建数学教育，使学生在获得数学能力的同时，体验到数学的乐趣和魅力”（CSDE，1985，p.5）。

《NCTM 1989 课程标准》指出学生的教育目标必须体现数学教养的重要性。为此，给所有学生提出 5 项目标：

（1）学会重视数学（learn to value mathematics）；

（2）建立对自己数学能力的信心（become confident in their ability to do mathematics）；

（3）成为数学的问题解决者（become mathematical problem solvers）；

（4）学会数学式的交流（learn to communicate mathematically）；

（5）学会数学推理（learn to reason mathematically）（1989 NCTM p.5）。

“1989 美国课标”接着写道：“我们相信，学生如果感受到了课程标准所概述的这些体验，就能够获得数学能力。”（1989 NCTM p.5）

Wilson 曾写道：“加州和全国的关于数学教育和数学教育改革的讨论是互相渗透的，二者间没有清晰的界限。对于一个旁观者，很难将这些讨论分割开来，追究那些思想真正的来自什么地方。……许多加州的学校教师参与了 NCTM 1989 课程标准的撰写和讨论。”（Wilson, S. 2003, p.127）

在结构形态方面，加州数学教育大纲对 NCTM 课程标准的影响是显而易见的。虽然前者称并列的条目为“支股”或“领域”，后者称为“标准”，但是结构的特征是共同的。而借着 NCTM 课程标准，加州第一个数学教育大纲所创立的“条目并列型”结构的影响扩大到了全美国。

在《1980 增补版大纲》的基础上，《1985 加州大纲》提出了一个新的条目类别：“贯穿大纲的重点领域”^{xxi}，加在“支股”表述的前面。“重点领域”一共有 5 个，它们是：

- （1）解决问题；
- （2）计算器技能；
- （3）运算技能；
- （4）估算与心算；
- （5）数学教育中的电脑。

除了新增的“重点领域”这一条目类别，原先大纲中的条目“支股”在《1985 版大纲》里称作“支股或领域”。该大纲在“支股”方面的增、减和改动是：减去“问题解决/应用”这一支（因为“解决问题”已成为“重点领域”），增加了新的“代数”一支；在支股的名称方面，把“基础大纲”里的“算术、数和运算”改为“数”，“关系与函数”改成“模式（patterns）与函数”，“逻辑思维”又改回“逻辑”，“概率与统计”改成“统计与概率”。这么一来，5 个重点领域加上 7 个普通的“支股或领域”，就有了 12 个条目。

在条目的形态方面，《1985 版大纲》还有一个创新，即在每一个“支股或领域”里列出若干要求在教学中落实的细则。也就是说，假如视原来的“支股或领域”为一级条目的

话，每个一级条目之下又分出若干二级条目。比如，在“数”这一级条目之下列出 7 个二级条目，在“度量衡”这一级条目之下里列出 9 个二级条目。因此，1985 加州大纲有 12 个一级条目，而其中 7 个“支股或领域”又进一步分出了 41 个二级条目。

覆盖全美的《NCTM 1989 课程标准》沿用了加州教学大纲条目并列的结构形态^{xxii}，共设立 13 条标准。“各条课程标准都先陈述课程应当包含的数学内容，再描述介绍和该内容相关的学生活动，以及包括教学实例在内的讨论”（1989 NCTM, p.7）。

与《1985 加州大纲》一样，《NCTM 1989 课程标准》将 13 条标准分成两组，前面的 4 条“数学作为问题解决（Mathematics as problem solving）”、“数学作为交流（mathematics as communication）”、“数学作为推理（mathematics as reasoning）”和“数学作为联系（mathematics as connections）”为一组，是各个学段共有的。后面的 9 条为一组，是比较具体的学习内容，各学段有所不同。比如 k-4 年级的是“估算”、“数感和数字”、“整数运算的概念”、“几何与空间感”、“度量衡”、“统计与概率”、“分数与小数的模式与关系”。而其它学段则与之略有不同。

《1989 NCTM 课程标准》借鉴了《1985 加州大纲》的做法，在每一条标准之下分出若干细则，即将一级条目分作若干二级条目。一般来说，如果所给的指示有若干层次，被指示者所最关注的，是最终端层次的内容，因为正是这些最具体的要求，和他们的行为直接有关。例如，当一位 k-4 年级的教师看到第一条标准“数学作为问题解决”题目的时候，他想到的是是一条标准。然而当他看到这个题目接着分出的 5 项细则的时候，他的注意力立刻会转移到这 5 项细则上去，因为这 5 条细则才是他们教学中真正要落实的。所以，在这里，直接影响教师课堂教学的，是二级条目的内容和数量。表 1 列出的，是 1989 美国 NCTM 课程标准 k-4 年级的 13 个一级条目和 56 个二级条目（而 5-8 年级有 72 个二级条目）（NCTM, 1989）。

如果读者有耐心把表 1 中的 56 个二级条目从头到尾看一遍的话，会发现它们的句型之不工整，用词之空洞，相互之间的逻辑关系之松散，领域完整性之缺乏，以及部分条目表述之费解^{xxiii}，像是一次“头脑风暴”的记录，而绝非是一个能够担当起指导全国教师数学教学重任的“标准体系”。

“NCTM 课程标准”的目的，在于通过课程和评估给教师的数学教学以指导。然而，无论是对于课程设计者、对于评估测验的撰写者，还是对于广大的教师，面对这样多达 56 个的目标都会感到手足无措，以至于干脆忽略它们的存在。在这里不能不指出的是：正是当初《支股报告》创建的“条目并列”的小学数学结构形态，为这样庞大的“头脑风暴”记录式的文本成为全美国小学数学指南开启了方便之门。

1992 年，加州又颁布了一个新的《数学教育大纲》，使加州的数学教育内容向“从 1985 加州数学大纲理念延伸而来的 NCTM 课程标准”进一步靠拢（Foreword of 1992

California Framework, p. viii) .

表1 1985 NCTM 课标 k-4 年级学段的 13 个一级条目和 56 个二级条目

<p>标准 1：数学作为问题解决</p>
<p>1. 运用问题解决的方法来研究和理解数学内容；</p> <p>2. 从日常生活和数学情景中形成 (formulate) 问题；</p> <p>3. 发展和应用策略来解决各种问题；</p> <p>4. 证明和解释解决问题之后得到的结果；</p> <p>5. 在有意义地运用数学方面建立起信心。</p>
<p>标准 2：数学作为交流</p>
<p>6. 把实物、图画和图表与数学概念相联系；</p> <p>7. 对自己关于数学概念和情境的思考进行反思和说明；</p> <p>8. 把日常生活语言和数学语言和符号相联系；</p> <p>9. 认识到表达、讨论、读、写、听数学是学习和运用数学的一个重要部分。</p>
<p>标准 3：数学作为推理</p>
<p>10. 得出关于数学的逻辑结论；</p> <p>11. 运用实物模型 (models) 已知的运算口诀 (facts) 运算规律和关系 (relationships) 来解释他们的思想；</p> <p>12. 论证自己的答案和解决问题的过程；</p> <p>13. 运用式样 (patterns) 和联系 (relationships) 来分析数学情境</p> <p>14. 相信数学是说得通的，有道理的。</p>
<p>标准 4：数学作为联系</p>
<p>15. 连接关于数学概念和运算过程的知识；</p> <p>16. 将概念或过程几个不同的表达和一个答案相联系；</p> <p>17. 认识不同的数学内容 (topics) 之间的关系；</p> <p>18. 在其它课程领域运用数学；</p> <p>19. 在日常生活中运用数学。</p>
<p>标准 5：估算</p>
<p>20. 探索估算的策略；</p> <p>21. 认识在什么情况下适合估算；</p> <p>22. 决定结果的合理性；</p> <p>23. 将估算运用于数量、度量、运算和问题解决。</p>
<p>标准 6：数感和记数法</p>
<p>24. 通过现实世界的经验和运用实物建构数字的意义；</p> <p>25. 通过联系数数、组组和位值概念，了解我们的记数法；</p> <p>26. 发展数感；</p> <p>27. 解释他们现实生活中碰到的数字的多种运用。</p>
<p>标准 7：整数运算的概念</p>
<p>28. 通过模拟 (model)^{xxiv} 和讨论丰富的多种的问题情景发展 / 形成运算的意义；</p> <p>29. 建立“数学语言和运算符号化”与“问题情境和非正式语言”之间的联系；</p> <p>30. 认识到许多不同的问题结构可以用一种运算表达；</p> <p>31. 发展运算感。</p>
<p>标准 8：整数运算</p>
<p>32. 模拟、解释、并且发展起运用口诀 (basic facts) 和运算法则的一定的熟练程度；</p>

表1 (续) 1985 NCTM 课标 k-4 年级学段的 13 个一级条目和 56 个二级条目

<p>33. 运用各种心算和估算技能；</p> <p>34. 在适当的运算情景中运用计算器；</p> <p>35. 为解决具体问题选择和运用适合的运算技能，并且判断得出的答案是否合理。</p>
<p>标准 9：几何与空间感</p>
<p>36. 描述、模拟、画出形状，给形状归类；</p> <p>37. 研究并预计形状结合、分割和变化的结果；</p> <p>38. 发展空间感；</p> <p>39. 在几何概念和数字及度量概念之间建立联系；</p> <p>40. 认识和欣赏生活中的几何。</p>
<p>标准 10：度量衡</p>
<p>41. 了解长度、容积、重量、质量 (mass) 面积、体积、时间、温度和角的性质；</p> <p>42. 学习度量过程，发展和度量单位有关的概念；</p> <p>43. 在度量中运用估算；</p> <p>44. 在问题和生活情景中运用度量。</p>
<p>标准 11：统计与概率</p>
<p>45. 收集、组织和描述数据；</p> <p>46. 建立、阅读和解释数据的显示形式 (displays)；</p> <p>47. 形成和解决需要收集和分析数据的问题；</p> <p>48. 探索几率的概念。</p>
<p>标准 12：分数和小数</p>
<p>49. 发展分数、带分数和小数的概念；</p> <p>50. 发展分数和小数的数感；</p> <p>51. 运用实物 / 具象 (models) 来联系分数和小数以及发现等值分数；</p> <p>52. 用实物 / 具象 (models) 来探索分数和小数运算；</p> <p>53. 把分数和小数运用到问题情境；</p>
<p>标准 13：模式 (patterns) 和关系 (relationships)</p>
<p>54. 认识、描述、扩展和创造各种模式；</p> <p>55. 表达和描述数学关系；</p> <p>56. 探索和运用各种各样的、开放式的句子来表达数学关系。</p>

用与数学相关的认知活动或行为来表述小学数学教学的领域或目标，最大的问题恐怕是缺乏可操作性。数学学习固然是人类的认知活动，然而各种认知活动称谓的含义往往模糊空泛，没有确切的定义。比方说，“培养数感”是 NCTM 课程标准里一个非常重要的教学目标，但是究竟什么是“数感”？各人有各人的诠释，很难说清楚。Berch 在“什么是数感 (Making sense of number sense)”一文中援引 Gersten 等的研究写道：“……没有两个研究者对‘数感’作出的解释是完全相同的。更成问题的是，认知科学家和数学教育者对‘数感’这一概念的解释非常不同。”(Berch, 2005, p.333) Berch 自己在“仔细研读了数学认知、认知发展、和数学教育这些领域里的相关文献之后”，把文献中曾经提到的“数感”的特性 (features) 列出来，竟有 30 种之多！难怪他把这些特性称为“可疑的成分 (alleged components)”(Berch, 2005, p.334)。要求教师以培养如此模糊宽泛定义的多种认

知能力作为教学目标, 实在是很不现实。

2.6 1999 年加州数学大纲和 2000 年 NCTM 课程标准——第三级条目的创建

1999 年, 加州发布第六个数学教学大纲。2000 年, NCTM 发表第二个课程标准。这两个文件所表达的教学理念, 和以上 3 个有所不同: 在上一轮改革中被忽视的数学内容和运算技能得到了加强。1999 年加州数学教学大纲按照年级撰写数学学习的内容, 把原来的条目“支股”更改名称为“标准”。2000 年 NCTM 课程标准把 1990 年 NCTM 课程标准的 13 条改为 10 条, 把和原来的第一组标准功能相似的称为“过程标准 (Process standards)”, 把和原来的第二组标准功能相似的称为“内容标准 (Content standards)”, 并且交换了顺序, 把“内容标准”放到了“过程标准”的前面。例如, 在 1989 NCTM 课程标准里, “解决问题”是 13 条标准的第 1 条, 而在 2000 年 NCTM 课程标准里, “解决问题”是 10 条标准的第 6 条。条目顺序的变化, 正反映了课程标准撰写者的数学教学理念的改变。

在 1999 加州数学教育大纲和 2000 年 NCTM 课程标准里, 条目并列的结构形态又有了新的发展: 在第二级条目之下再分出更细的第三级条目。1999 加州数学大纲定为 5 条标准, 每条标准按照年级化成若干第二级条目, 第二级条目又再进而化成作为终端目标的若干知识点, 构成第三级条目。《2000 NCTM 课程标准》在保留原来把第一层大标准细化为若干二级标准的同时, 再把每一个内容标准的二级标准进一步表述成若干“期望”(expectation), 形成了第三级条目。例如, 其 pre-k-2 年级第一条标准“数和运算”的二级标准有 3 个, 而这 3 个二级标准又进一步化成作为终端目标的 12 个“期望”。pre-k-2 年级 10 条课程标准的终端条目有 63 个, 3~5 年级有 81 个。所以, 和 1989 年标准相比, 虽然一级条目减少了, 但是直接影响到教师教学的终端条目却有增无减。在条目并列型的小学数学内容结构里这样不断地增加终端条目, 很可能就是美国小学数学越来越宽、同时越来越浅的重要原因。

为了改变美国数学课程“一哩宽、一寸深”的现象(见 NCTM 2006 p.3 和 Schmidt etc. (1997)), 2006 年, NCTM 做出一个比较大的举措: 颁布《数学教育重点》(Focal Points)^{xxv}, 为教师“提供关于每一个年级里最重要的数学概念和技能的说明”。(NCTM, 2006, p1) 至此, 加州在 1999 年、NCTM 在 2006 年回到了以前按照“年级”表述小学数学学习内容的做法。

在《数学教育重点》里, 每个年级有 3 个“重点”内容的说明, 以及若干其它标准和这些“重点”的联系。该文件突出重点的做法当然是值得肯定的。但是, “条目并列型”的结构不改变, 没有一个完整的学科作为小学数学教育的核心的话, “宽而浅”的课程可以因条目数量的减少而变“窄”, 但却不会因“窄”而自动变“深”。

3 结 论

3.1 条目并列型结构最明显的特征——不稳定 不连贯 不统一

在“新数学”运动中发布的第一个加州数学教育大纲《支股报告》给美国小学数学造成的最大的影响, 是根本改变了小学数学教学内容的结构——从以一个学科贯穿始终的“学科核心型”结构, 变成了由若干条目齐头并进、同时贯穿始终的“条目并列型”结构。几十年来, 虽然条目的称谓有过“支股”、“领域”或“标准”等数种, 但是同样的结构延续至今。“条目并列型”结构给美国小学数学教学带来的伤害, 是内容的不稳定、教学的不连贯、概念的不统一。

3.1.1 内容的不稳定

一些人(如一个委员会)决定的小学数学内容条目的名称、条目所含的内容, 条目的数量, 以及条目的形态(如主要条目是否包含若干级次条目), 很容易被另一些人(如另一个委员会)改变。事实上, 上面讨论过的 10 个大纲或课程标准中, 几乎每一次的条目名称都不相同, 曾经出现过的不同名称的一级条目就有 49 个, 其中 28 个名称只用了一次, 14 个名称只用了两次, 比较稳定的名称只有“几何”与“度量衡”两个(曾经出现在 8 个文件中)。

“条目并列型”结构造成的内容不稳定必然会给教学实践者(课本的作者, 测验撰写者和教师)造成困扰。条目的增加或减少, 条目名称的修正, 同样条目内容的改写, 甚至原有条目排列顺序的变动, 都意味着给教学要求带来较大的、甚至是实质性的变化。如此几年一大变的要求, 不用说需要同时任教数门学科的教师, 即使是只教数学的专职教师也是难以做到的。频繁的变化, 甚至可能造成许多家庭里父母都无法给子女辅导小学数学的情况。

“内容的不稳定”给小学数学领域造成的另一危害, 是经验难以得到积淀。任何一个领域的发展, 纵向的积淀是非常重要的, 这需要领域内容的基本稳定。如果总是在变化, 在丢弃, 在新增, 有意义的东西就难以保留下来。而“核心结构型”小学数学内容和教学方法, 正是经过长期的积淀而形成的。其核心学科算术的术语名称已经至少使用了几百年。数学界的学者仿效经数千年流传下来的《原本》的思路, 修正这些术语名称的定义, 建设起小学算术的定义体系(从美国的情况来看, 这个过程花去了 19 世纪后半叶的几十年时间才完成)。之后, 从定义体系出发, 建设起完整的小学算术理论。又经过几十年的时间, 教科书的编撰者和教师才摸索出把它教给小学生的做法。这些做法有些体现在课本里, 还有许多存在于教科书编撰者和教师的口耳相传之中。这一切不容易被觉察到的积淀, 正是需要领域内容的稳定才可能实现的。

3.1.2 教学的不连贯

前面已经指出, “核心结构型”的中国小学数学教学里, 算术和非算术内容教学的连贯性都得到了有效的保障。而在多个条目齐头并进的课程结构里, 课程内容不得不在众多条目之间“跳跃”, 因此美国小学生数学学习不可能有连贯性。这对于学生的学习来说, 其实是无形的严重伤害。

3.1.3 概念的不统一

当今美国小学数学课程里的概念多而杂, 相互之间缺乏统一性。这些概念, 有些来自现有的大纲或标准的条目, 也有些是曾经有过的条目遗留下来的。比如“新数学”运动虽

然退潮了，但是它带进来的一些概念却留在了小学数学领域。各种学术背景的概念“精彩纷呈”。不同学术背景的概念在美国小学数学领域里各显神通。拿整数和分数四则运算的意义来说，整数加减法的概念，目前流行的是由一批研究认知的学者从观察儿童活动归纳出来的11个“模式”^{xxvi}；整数乘法概念，有“连加”、有“等量组”，也有“笛卡尔积”等。分数四则运算的概念，和整数基本上没有联系。

对于这样的概念不统一、不一致的情况，美国小学数学界并不是没有意识到。在文章中提及过的数学教学大纲或课程标准里，几乎每一个文件都提到“统一”或“一致”的重要性。但是，几十年来始终没有做到统一或一致。事实上，达到小学数学概念的统一性和一致性的最大障碍，正是**条目并列型的结构**。在这样的结构里，概念统一性的整合，需要靠教师在施教的那一时刻来完成。具有这种整合能力的教师必须同时具有：(1)对数学学科有整体、深刻的认识；(2)谙熟小学生数学学习的特性。产生的这样的人材不是不可能，但是社会成本相当高；而小学数学教师的需要量又是如此之大，这恐怕会是一个难以解决的问题。

内容的不稳定、学习过程的不连贯、概念的不统一对小学生数学学习造成的伤害，是不言而喻的。而这3点，正是**美国小学数学条目并列型的结构所造成的无可避免的必然结果**。

3.2 需要重新认识小学算术学科及其价值——对美国数学教育的一点建议

有没有一个学科，它的概念体系能够把小学数学的主要内容——整数和分数四则运算的法则、意义、以及数量关系，统一起来呢？有的，这就是美国数学界的学者曾经参与构建的，后来在世界各国得到发展和完善的小学算术学科。

从20世纪60年代初“新数学”运动到现在，美国小学数学界有一个主流的倾向，那就是追求“高级性”——高级的学科知识，诸如集合论、数论、函数等高级数学分支的一些概念；高级的认知能力，诸如“解决问题”、“数学思维”、“像数学家那样思考”等。近些年，又做了许多把代数下放到小学的努力。似乎只有把这些“高级”的东西压到小学里，小学数学教学质量才能提升。然而，广大美国教师和学生中的“数学恐惧症 math phobia”，正是在追求“高级学科知识”的“新数学”运动中发作（见 Kline, M. (1973)），并且延续至今的。或许可以说，追求“高级”的几十年里，人们能明显感觉到的结果是“数学恐惧症”的蔓延，而并不是小学数学质量的提高。

美国小学数学教育这样一味地追求“高级”的原因之一，是由于不了解小学算术的教育价值。这是当今美国小学数学界的一个盲点。一些流行、然而过于简单化的、不正确的观念是：把算术等同于基本运算技能，再把基本运算技能等同于“死记硬背的低级认知活动”。如此，在提高小学数学教育质量的各种诉求里，“算术”成了不受欢迎的“丑小鸭”。

在这里提请读者注意两个事实：(1)一些目前在美被公认为小学数学教育质量高的国家，例如新加坡，恰恰是以算术作为其核心学科的。(2)被介绍到美国小学数学教育界的，把代数渗透到小学的俄国小学数学教育，从一年级就起

有严格的小学算术理论教育（加、减法的术语、定义、加减法的关系、加法的交换律、结合律以及它们在减法里的运用，并且以此来对加减法运算法则作出解释）^{xxvii}。而能在美国看到的俄国小学课本译本中，“代数”内容正是以小学算术理论体系为依托的^{xxviii}。

“小学算术”的前身“商用算术”本为整数和分数四则运算法则的汇集，称不上是一门数学学科。但是，在数学界的学者以欧几里德《原本》为标杆而为其构建理论时，它获得了新生，当之无愧地成为数学领域的一门学科。在《小学数学的掌握和教学》一书中讨论的中国教师理解比较深刻的“Fundamental mathematics”，其实主要是对“小学算术理论”的理解。书中采访的中国小学教师都没有读过大学，没有学过高等数学，但是他们对小学数学的讨论却显示出相当的深度。这个深度，就是通过钻研他们所教的、以小学算术为核心学科的小学数学内容得来的。所谓“Fundamental mathematics”确切地说，是数学学习的基础，而这个基础正以小学算术为基石的。因此，建议美国小学数学教育界重新认识小学算术——它的内容以及它在数学教育中的意义。

3.3 关于中国小学数学课程标准——担忧和提醒

2000年3月，中国颁布了《2000中国课标》。2011年9月，又颁布了《全日制义务教育数学课程标准》（下称《2011中国课标》）。作者想借这篇文章表达自己的一点担忧和一点希望。

研读这两版“中国课程标准”，既看到它们的“中国特色”，也看到其在理念、措辞、行文等多方面对美国《1989 NCTM 课程标准》的借鉴。令人担心的是，中国的课程标准似乎和1963年加州第一个数学教学大纲一样，在没有经过实验的情况下，一举改变了小学数学内容的结构形态。《2000中国课标》提出“4个方面”的“总目标”：知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度（p.4）（见图7右侧前排），以及“4个学习领域”：“数与代数”，“空间与图形”，“统计与概率”，“实践与综合应用”（p.5）（见图7右侧后排）。这“4个方面”和“4个领域”，和图1后侧所示美国《1989 NCTM 课程标准》的两组条目在功能和排列上十分相像。由此，之前中国小学数学以算术为核心学科的内容结构，变成了“4个方面”和“4个领域”齐头并进的条目并列型结构：

中国课标中的8个一级条目，和美国条目并列结构中的条目有两个最基本的共同特征：(1)没有一个条目能自成一体，具备本身的完整性。(2)条目之间的相互联系，既没有理论上的论证，也没有操作方面的解说。所以，尽管在文件里有诸如“密切联系”、“相互交融”这样的词汇，实际上却和前面讨论的加州大纲和 NCTM 课程标准里常用的“统一性”、“一致性”等词汇一样，因为没有阐明落实的途径而成了空话。

中国的小学数学内容结构形态的改变是令人担心的：中国的小学数学，很可能会因此而重蹈美国的覆辙，一步一步地走向“不稳定”、“不连贯”、“不统一”的境地。事实上，文章前面讨论的“条目并列型”课程结构的问题，在中国已见端倪，“重蹈覆辙”并非是危言耸听。请看图8，前、后

两版《中国课标》前言里“关于学习内容”部分提到的“要在教学中注重发展”的条目，就由 6 条增加成了 10 条：

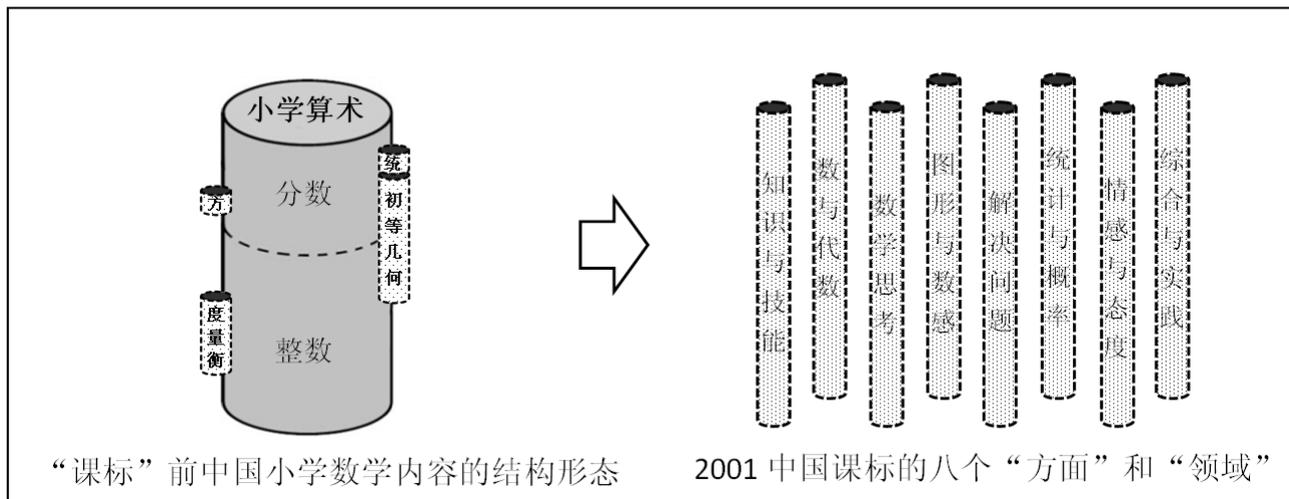


图 7 中国小学数学内容结构的变化

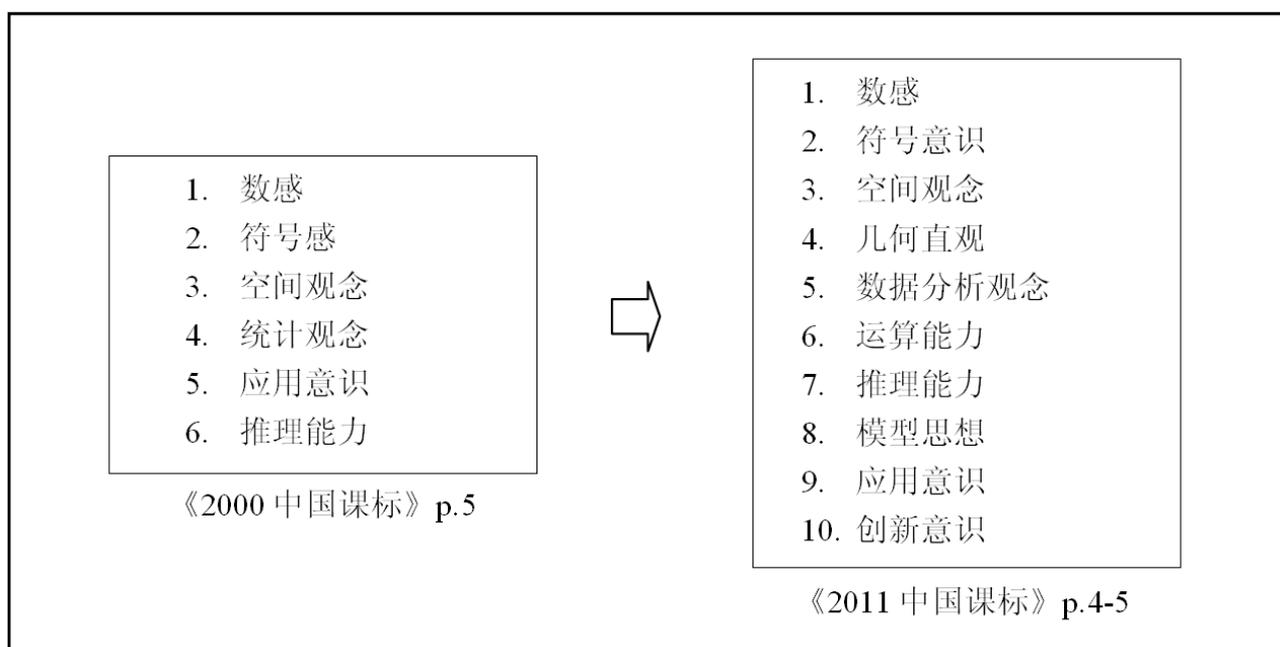


图 8 中国数学课程标准实验稿和修正稿条目变化的例子

(“前言”里“关于学习内容”部分指出的“要在教学中注重发展”的条目)

如文章所描述的美国小学数学教育的前车之鉴,结构性的改变,其影响会是非常深远的:理念可以调整,教学方法可以改变,但是结构散了,重建起来就不容易了。

中国小学数学教育从核心学科型结构转向条目并列型结构,可能会受到最大冲击的当属原来的核心学科——小学算术。在《中国课标》里,“算术”不再视作是一个完整的学科,而是被分散到了若干条目里。这个做法和 1963 加州第一个数学教学大纲《支股报告》中的做法是完全一样的。从此以后,美国小学算术学科就进入了彻底瓦解的过程。覆辙犹在,这不能不引起教育工作者的担忧和警惕。

幸运的是,中国小学数学界的状况,和 50 年前美国小学数学界的情况不相同。20 世纪 60 年代初小学算术学科在美国瓦解,除“新数学”的冲击以外也有自身的原因:在

19 世纪末定义体系基本成形之后,美国的小学算术作为一门学科的其他方面未得到应有的发展,而在 20 世纪开始几十年的“进步教育”运动中,定义体系反而有所涣散^{xxix},已然处在“不堪一击”的状态。但是,当前中国小学数学教育界的算术学科知识是成熟的、完整的。虽然眼下“课标”文件里看不到“算术”的学科名称,但是系统的算术学科知识仍然存在于教科书中,存在于广大教师的头脑里。即使在按照课标编写的两套教材里,小学算术定义体系虽然有涣散的征兆^{xxx},但还基本完整。

以史为鉴,提请中国小学数学界认真考虑以下两个有关改革方向的问题:第一,究竟是不是有充分的理由,要把“学科核心型”内容结构变成“条目并列型”内容结构?第二,究竟是不是有充分的理由,要放弃中国小学数学界经数十年

发展起来的算术学科？无论数学教育改革如何往前走，都不应该绕过对这两个问题负责任的思考。

[参 考 文 献]

- [1] Buckingham, Burdette. Elementary Arithmetic: Its Meaning and Practice [M]. Boston: Ginn and Company, 1947/1953.
- [2] Berch, Daniel. Making Sense of Number Sense: Implications for Children with Mathematical Disabilities [J]. Journal of Learning Disabilities, 2005, (38): 333-334.
- [3] Carpenter T, Fennema E, Franke M, et al. Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction [M]. NCTM, Heinemann, 1999.
- [4] Gersten R, Chard D. Number Sense: Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities [J]. The Journal of Special Education, 1999, (33): 18-28.
- [5] Kline M. Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math [M]. New York: ST. Martin's Press, 1973.
- [6] Schmidt, William H, Curtis C, et al. A Splintered Vision: An Investigation of U.S. Science and Mathematical Education [M]. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1997.
- [7] Wilson S. California Dreaming: Reforming Mathematics Education [M]. New Haven: Yale University Press, 2003.
- [8] 马立平. 对于“儿童数学”在教学中作用的反思——从一位数加减法运算的三种教学思路说起 [EB/OL]. www.lipingma.net.
- [9] 马立平. 小学数学的掌握和教学. 李士锜, 吴颖康, 等译. 上海: 华东师范大学出版社, 2011.
- [10] 美国加州数学教学大纲一览
CSDE. Summary of the Report of the Advisory Committee on Mathematics to the California State Curriculum Commission [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1963.
CSDE. The Second Strands Report: Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Eight [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1972.
CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1975.
CSDE. Mathematics Framework and the 1980 Addendum for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1982.
CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1985.
CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1992.
CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 1999.
CSDE. Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten through Grade Twelve [M]. California State Department of Education, Sacramento, 2006.
- [11] 美国 NCTM 课程标准和《数学教育重点》
NCTM. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics [M]. National Council of Teachers and Mathematics, Reston, 1989.
NCTM. Principles and Standards for School Mathematics [M]. National Council of Teachers and Mathematics, Reston, 2000.
NCTM. Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics [M]. National Council of Teachers and Mathematics, Reston, 2006.
- [12] 中国课程标准
《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001.
《全日制义务教育数学课程标准》[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.

A Critique to the Structure of US Elementary School Mathematics

MA Li-ping

- (1. Independent Scholar of Elementary Mathematics Education;
2. Principle of Sitanfu Chinese School, USA)

Abstract: With the “new math” of the early 1960s came significant changes in the content and organizing structure of U.S.

elementary mathematics. Among changes in content: the theory of school arithmetic was abandoned and concepts of advanced mathematics were introduced. The organizing structure changed from centering on arithmetic, and instead became a collection of parallel strands. These changes and their history suggest a cause for the “mile-wide, inch-deep” elementary mathematics curriculum in the United States. This history also suggests lessons for elementary mathematics education reform in China.

Key words: elementary mathematics: content and organization; school arithmetic; *Mathematics Framework for California Public Schools*; *NCTM Curriculum Standards*; *Chinese Mathematics Curriculum Standards*

[i] 2001 年中华人民共和国教育部颁布的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》发表之后，原来中国的小学数学教育内容组织形态开始发生变化，故文章主体部分以“2001 中国课标”发表之前的中国小学数学教育内容结构为讨论内容，而在最后指出中国小学课程结构改变的情况。

[ii] 这套教材是 1988 年出版的由北京、天津、上海、浙江 4 省市小学教材联合编写组编写的六年制小学《数学》课本，亦称“三市一省版”，曾在中国广泛使用。虽然当时全国有若干套小学数学教材并存，但是“三市一省版”所反映的中国小学数学的“学科核心型”结构，是各套教材共同的。

[iii] 请注意中国教材和美国教材篇幅上的差别，这套 6 年用的教材一共全套教材共 12 册，每个年级两册，供上、下两个学期使用。教材大小为 32 开本，平均每册 113 页。除了第一册有两张彩页以外，其他全部是黑白印刷。课本上都是“必学”的内容。由于课本本身的篇幅短，且学生人手一本，有属于自己的书，为掌握性学习提供了保障。美国小学数学教材是每年一本，每本几百页，一般超过 500 页，16 开本，多为彩色精美印刷，价格昂贵，由学区统一购买，供连续若干年的学生在课堂里借用，不能带回家。因此，美国课本的内容实际上由教师选用，学生很难对课本有“掌握”的感觉。

[iv] 珠算教学分两次进行，第一次加减法，是四年级第一学期最后一部分内容；第二次乘法，是四年级第二学期最后一部分内容。考虑到图 2 的简洁性，没有标在上面。

[v] 19 世纪末，中国还处在引进阿拉伯数字运算方法的初期，故小学算术理论的创立当和中国无关。

[vi] 著名古希腊数学家丢番图墓碑上关于计算他生命长度的题目：“他一生的 $\frac{1}{6}$ 是幸福的童年， $\frac{1}{12}$ 是无忧无虑的少年。再过去 $\frac{1}{7}$ 的生命，他建立了幸福的家庭。5 年后儿子出生，不料儿子竟先其父 4 年而去世，只活到父亲岁数的一半。请你算一算，丢番图活了多久，才和死神见面？”按照小学算术定义体系的解的算术式为： $(5+4) \div (\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{7}) = 84$ 。

[vii] 事实上，目前还没有证据证明中国小学数学中关于整数和分数四则运算的定义体系是从美国引进的。有一个可能性是：其他一些国家的数学界学者在为他们国家的小学生撰写教材时和美国学者做了相似的工作。中国小学算术的定义体系究竟从哪个国家引进尚待考察。

[viii] “完成了分数运算教学”这个时间点很重要。之前，整个定义体系还没有学完，不能说明问题。之后，又可能因为学会了其它解题方式（比如代数）而把用算术解题的方法忘了，也不能说明问题。

[ix] 说“似乎基本”，是因为在 20 世纪某些关于算术的专著里，比方说 Buckingham (1947/1953) 的《小学算术的意义和实践》(*Elementary arithmetic: its meaning and practice*) 一书里，还是有进一步深入的讨论的，但是，尚没有看到这些演进落实到的实际使用的小学课本里的例子。

[x] 可以纳入“小学算术教学法”范畴的还有用以分析数量关系的线段图 (Bar/line model)、算术教学用术语体系、四则综合运算等。

[xi] 关于这 4 个部分，作者正在撰写的《小学算术：儿童学习数学之基础》一书中有详细的讨论。

[xii] “进步教育”运动比较重视数学知识在儿童实际生活中的应用，所以忽视了小学算术的理论建设。但是，这个“偏差 deviation”并不是其倡导者杜威先生的初衷。杜威先生是主张课程中学科知识和儿童生活相兼顾的（见其著作《儿童与课程》），可惜这样的“兼顾”在“进步教育”运动中实际上并没有实现。

[xiii] 定义体系赋予小学算术表达复杂数量关系的能力，实施这种能力的算式，很可能是整合其它非算术领域的重要手段。

[xiv] 《支股报告》(*Strands Report*) 可能有两个重要的思想来源：一个是布鲁纳的《教育过程》(*The process of education*, Jerome Bruner, 1960)，另一个是尼古拉·布尔巴基 (Nicolas Bourbaki) 的《数学原本丛书》(*the Elements of Mathematics series*)。有兴趣的读者不妨作进一步的研究，由于篇幅的原因，文中就不再展开了。

[xv] 《支股报告》在“数和运算”支股部分讨论的 15 个概念是：一一对应 (p.4)、位值 (p.5)、数和数字 (p.6)、顺序：数轴 (p.6)、运算 (p.7)、矩阵 (p.7)、笛卡尔积 (p.7-8)、闭合性 (p.8)、交换率 (p.9)、结合律 (p.9)、同一元素零和一 (p.10)、分配律 (p.10)、基数 (p.11)、十进制系统 (p.12)、平方根 (p.13)。

[xvi] 《支股报告》第 4 页上写道：“……必须不能让学生感到算术好像只是一系列互不联系的零碎知识或运算技能，本报告下面的部分里将简要地讨论一些重要的统一的概念。”报告并没有提到 19 世纪末已经存在于

美国小学数学课本里的将算术运算统一成一个学科整体的定义体系。或许有理由推断报告的作者对这一定义体系并不了解。

[xvii] 英文名称为：*The Second Strand Report: Mathematics Framework for California Public Schools, Kindergarten Through Grade Eight*，根据其实际意思和中国的习惯，把“Mathematics Framework”译成“数学教学大纲”，以下同。

[xviii] 一般认为造成这个转向的是前两次数学教学大纲所代表的“新数学”无法贯彻到学校教学实际中去，学生的基本运算技能反而出现了问题。加州教育部副部长在大纲的“序”里写道：“更新了的标准反映了大纲修改期间对于获得数学基本技能的许多担忧。”

[xix] 从这一版起，加州数学教育大纲内容涵盖幼儿园到高中（十二年级），文章仅讨论其小学阶段，即讨论幼儿园到六年级。

[xx] 见第一次支股报告第2页（CSDE，1963）。

[xxi] 即“major areas of emphasis that are reflected throughout the framework”（CSDE，1985，p.2）

[xxii] 《1989 NCTM 课程标准》和先于其公布的加州数学教育大纲有好些相似之处。《1989 NCTM 课程标准》13条标准所代表的13个内容领域，有11个可以直接从加州的数学教育大纲中找到渊源。

[xxiii] 举第八条标准“整数运算的概念”为例，其4个目标里的后面3个：“建立‘数学语言和运算符号化’与‘问题情境和非正式语言’之间的联系（Relate the mathematical language and symbolism of operations to problem situations and informal language）”，“认识到许多种不同的问题结构可以用一种运算表达（Recognize that a wide variety of problem structures can be represented by a single operation）”，“发展运算感（Develop operations sense）”，都不是一个普通教师容易理解的。可是《1989 NCTM 课程标准》没有作进一步的解释（所有终端目标都只列出标题，都没有进一步解释）。

[xxiv] 《中国数学课程标准》里“建模”一词疑是从这里的“model”翻译而来。其实，在当今美国小学数学里，“model”指的是用实物或图像把一个题目再现出来。比如说，对于题目“ $3+2=$ ”，学生能够先摆出3块塑料模块，再摆出2块，然后把它们合在一起，表示“ $3+2=$ ”；或者，学生在纸上先画出3个圈，再在旁边画出另外2个圈，表示“ $3+2=$ ”，这就是“to model”或“modeling”。因此，“model”一词翻译成“模拟”似更恰当。

[xxv] 文件全名为：*Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics*。

[xxvi] Carpenter等在“Cognitively Guided Instruction”研究中归纳出11种加、减问题，其中加法4种为“合并类问题里结果未知（join type problem result unknown）”、“分开类问题中开始量未知（separate type problem start unknown）”、“部分—部分—整体类问题中整体未知（part-part-whole type problem whole unknown）”、“比较类问题中比较量未知（compare problem compare quantity unknown）”（见Carpenter et al, 1999, p.12）。

[xxvii] 详见马立平“一位数加减法的三种思路”一文。

[xxviii] 美国“芝加哥大学学校数学研究项目（The University of Chicago School Mathematics Project）”曾经翻译全套前苏联小学数学教材，并于1992年出版了1-3年级的课本。在这套教材里可以看到，俄国小学数学教学里有代数的内容。但是，尚未见到关于俄国教材代数内容安排的具体研究。除了文章里提到的代数教学以算术理论为依托外，还有一点值得注意的是课文中有大量精心设计的练习。比如供一年级全年使用的205页的教科书里，有练习题3868题，其中式子运算题3060个，图画和文字表述的应用题492个，还有数百个其它形式的运算。

[xxix] 例如，在小学算术理论体系里，被乘数和乘数的严格定义和在算式中的特定位置，对于小学生抽象概念的步步提升是非常关键的。在进步教育运动年代的美国小学数学课本里，定义体系中被乘数和乘数的不同性质被忽视，为图“方便”而颠倒二者在算式中位置的做法得到肯定。

[xxx] 在人民教育出版社和北京师范大学出版社出版的两套小学数学课本里，小学算术定义体系里对被乘数、乘数的定义和对它们在算式里位置的规定都被放弃了，这和20世纪初美国进步教育运动中发生的情况十分类似。

[责任编辑：周学智]